גיאומטריה אלגברית - תרגיל 6

שאלה 1. תהי $X=\{z^2(xy-y^2)=0\}\subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ (הקואו' הן x,y,z).
מצאו את כל הרכיבים האי-פריקים של X.
הצדיקו את קביעתכם.

שאלה 2. ⓐ הוכיחו כי אם $U,V\subseteq \mathbb{A}^n$ פתוחות צפופות, אז $U\cap V$ פתוחה צפופה ב-$\mathbb{A}^n$.

ⓑ תהי $X\subseteq \mathbb{A}^n$ אלגברית. הוכיחו כי אם $U,V\subseteq X$ פתוחות ב-X אז גם $U\cap V$ פתוחה ב-X.

שאלה 3. תהי $X\subseteq \mathbb{A}^n$ קבוצה אלגברית אי-פריקה.
נניח כי $X=X_1\cup\cdots\cup X_r$ עבור $X_1,\dots,X_r\subseteq \mathbb{A}^n$ אלגבריות.
הוכיחו כי קיים $1\le i\le r$ כך ש-$X=X_i$.

שאלה 4. תהי $X\subseteq \mathbb{A}^n$ אלגברית ויהיו $X_1,\dots,X_r$ הרכיבים האי-פריקים של X. תהי $Y\subseteq X$ אלגברית ואי-פריקה. הוכיחו כי קיים $1\le i\le r$ כך ש-$Y\subseteq X_i$.

שאלה 5. יהי R חוג חילופי. אידיאל ראשוני $P\trianglelefteq R$ נקרא ראשוני מינימלי אם P לא מכיל אף אידיאל ראשוני של R חוץ מ-P עצמו.

ⓐ תהי $X\subseteq \mathbb{A}^n$ קבוצה אלגברית. הוכיחו כי תחת ההתאמה בין תתי-קבוצות סגורות $Y\subseteq X$ ואידיאלים רדיקליים של $F[X]$, הרכיבים האי-פריקים של X מתאימים בדיוק לאידיאלים הראשוניים המינימליים של $F[X]$.
(רמז: שאלה 4.)

ⓑ בונוס: הוכיחו כי לכל חוג R שאינו חוג ה-0 קיים אידיאל ראשוני מינימלי.

שאלה 6. תהי $X\subseteq \mathbb{A}^n$ אלגברית ותהי $S\subseteq F[X]$ תת-קבוצה.
הוכיחו כי $I_X(Z_X(S))=\sqrt{S}$.